

基于目标规划和粒子群算法的“FAST”主动反射面形状条件探讨

摘要

本文主要研究“天眼”的主动反射面形状对于信号接受的影响，结合考虑反射面板调节因素，建立了主动反射面模型，并计算了信号接收系统的接收比。

针对问题一，当待测天体位于基准球面正上方时，确定理想抛物面。基准反射面板和其调整后的理想抛物面均为对称图形，因此考虑它们的截面。第一步，确定基准球面和理想抛物面的横截面方程，在球面和抛物面相切的情况下，给出抛物面横截面的含参抛物线方程。第二步，确定抛物线的方程参数。根据主索节点调节距离平方和最小原则以及促动器伸缩量约束范围的约束条件，构建正则化规划模型，从而求出理想抛物线。

针对问题二，当待测天体位于某固定角度时，确定理想抛物面。首先，我们根据工作抛物面口径为 300m 这一条件确定需要调整位置的主索节点集合。其次，建立新的坐标系，在此坐标系下，理想抛物面具有标准型，通过题中坐标系与新坐标系的正交转换矩阵，可以得出题中坐标系下理想抛物面方程。类似问题一，根据主索节点调节距离平方和最小原则和促动器伸缩量约束范围构建规划模型。最后通过粒子群算法求解模型，结果见支撑材料附件 4。

针对问题三，基于问题二的结果，计算一般角度入射时，反射面在工作状态下馈源仓的接收比。我们仅考虑三角形反射面板重心对信号的反射。已知三个主索节点坐标，求出反射板平面方程和反射信号方程，接着求出馈源仓所在平面方程，求出反射信号与馈源仓所在平面交点，若交点与抛物面焦点距离不超过 0.5，则信号被接收。最后，统计出所有导致信号被接收的反射面板数量，将其与处于工作态的面板总数作比，即可得到馈源仓的接收比。经计算得到馈源仓接收比为 0.9867%。

关键字：FAST 中国天眼望远镜 目标规划 粒子群算法 空间解析几何

一、问题重述

中国天眼——500 米口径球面射电望远镜（Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope, 简称 FAST），是我国具有自主知识产权的目前世界上单口径最大、灵敏度最高的射电望远镜。它的落成启用，对我国在科学前沿实现重大原创突破、加快创新驱动发展具有重要意义。

FAST 由主动反射面、信号接收系统（馈源仓）以及相关的控制、测量系统组成，其中主动反射面是由主索网、下拉索以及促动器等主要部件构成的一个可调节球面。主索网由柔性主索按照短程三角网格方式构成，每个主索节点下连接一根下拉索，下拉索与地表的促动器连接，实现对于主索网的形态控制。

主动反射面分为基准态和工作态。基准态时反射面是一个基准球面；工作态时反射面形状被调节为一个 300 米口径的近似旋转抛物面。被观测体与基准球面的球心的延长线上设置馈源仓，其接收平面的中心只能在于基准球面同心的一个球面上移动；馈源仓接收信号的有效区域为直径 1 米的中心原盘。当 FAST 观测某个方向上的天体目标 S 时，馈源仓移动到对应方向的交点 P 上，调节部分反射面板，形成以 P 为焦点的近似旋转抛物面，从而将来自目标天体的平行电磁波反射汇聚到馈源仓的有效区域。

本题要解决的问题是：在反射面板调节约束下，确定理想抛物面，然后调节促动器，将反射面板调节为工作抛物面，使得该工作抛物面尽量贴近理想抛物面，以获得天体电磁波的最佳接收效果。

问题一，当待测天体位于基准球面正上方，即 $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$ 时，结合考虑反射面板调节因素，确定理想抛物面。

问题二，当待测天体位于 $\alpha = 36.795^\circ$, $\beta = 78.169^\circ$ 时，确定理想抛物面。调节反射面板和促动器，使反射面尽量贴近理想抛物面。并记录理想抛物面的顶点坐标，以及调节反射面 300 米口径内的主索节点编号、位置坐标、各促动器的伸缩量等。

问题三，基于问题二的反射面板调解方案，计算调节后馈源仓的接收比，并与基准反射球面的接收作比较。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

对问题一，假设由观察目标发出的信号为平行信号，该方向平行信号入射到“天眼”设备的曲面上，该曲面为理想抛物面，经曲面反射后，信号被馈源仓接收。此问题需要解决，当“天眼”在基准球面的情况下，考虑反射面板调节因素，确定理想抛物面。

当待测天体位于基准球面正上方，即入射信号方向为 $\alpha=0^\circ$ ， $\beta=90^\circ$ 时，理想抛物面的确定可以分为两个步骤：第一步，确定横截面曲线方程。因为基准反射面和其调整后的理想抛物面（旋转抛物面）均为对称图形，所以考虑它们的截面，二者方程分别表示为： $x^2+y^2=R^2$ 和 $x^2+2py+c=0$ ，参数 p 和 c 值决定了抛物线的形状和基准面的相对位置。第二步，确定方程参数。保持工作抛物面的焦点在焦面上，含参抛物线可以视为一抛物线簇，根据主索节点调节距离平方和最小原则构建规划，最优化后得到理想抛物面方程。通过理想抛物面方程和附件一给出的主索节点的坐标得到主索节点在反射面板调整后的对应坐标，由此坐标计算促动器的伸缩量，即主索节点调节距离。

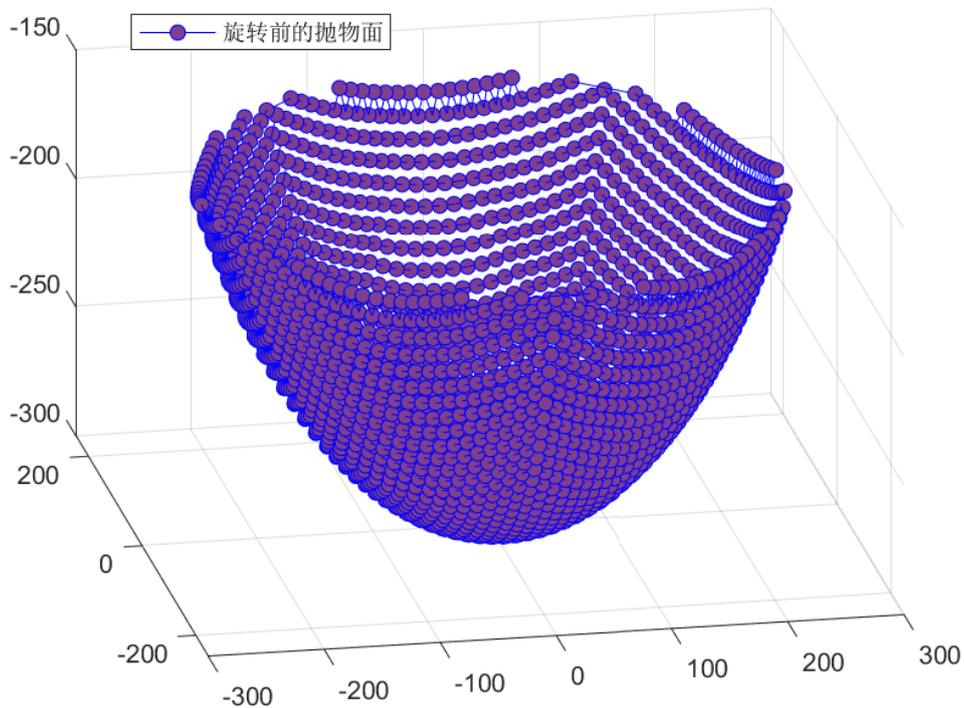


图 1 初始入射方向时 300m 口径工作面

2.2 问题二的分析

当入射信号方向为 $\alpha=36.795^\circ$ ， $\beta=78.169^\circ$ 时，确定理想抛物面。首先，确定需要调整位置的主索节点。根据题中工作抛物面口径为 300m 这一条件，容易计算出基准球面中哪些主索节点落入该口径覆盖范围内，即可得到需要调节的主索节点集合。其次，为了方便求解理想抛物面，我们建立新的坐标系，在该坐标系下，理想抛物面具有标准型。因此，只需确定理想抛物面的截面方程。记 C 为题中坐标系 $x-y-z$ 的原点， S 为观测目标，则新坐标系 $x'-y'-z'$ 的建立如下：坐标原点为 C ， z' 正方向为 CS 方向的单位向量。因为理想抛物面是以 z' 为轴的旋转图形，所以 x' 方向和 y' 方向可以为与 z' 垂直的平面上任意两个正交单位向量。第三，在新坐标系下，理想抛物面由垂直于平面

$x' - y'$ 的截面绕 z' 旋转而成。理想抛物面的截面方程表示为： $x^2+2py+c=0$ 。重复问题一的第二步方法，根据主索节点调节距离平方和最小原则构建规划模型，最优化后得到截面方程，将截面旋转后，得到新坐标系下的理想抛物面方程。第四，由题中坐标系到新坐标系的转换矩阵，可以得出题中坐标系下理想抛物面方程。由于此规划模型为非线性优化问题，因此我们利用启发式算法——粒子群算法探索其全局最小值。我们通过设置不同的 w, c_1, c_2, k ，增强模型的全局和局部搜索能力。由于粒子群算法具有随机性，我们对结果进行 10 此次运算，取其平均值，作为其最终坐标值。最后，在得到新坐标系下的坐标值后，通过坐标变换方程转换为题中坐标系下坐标值。

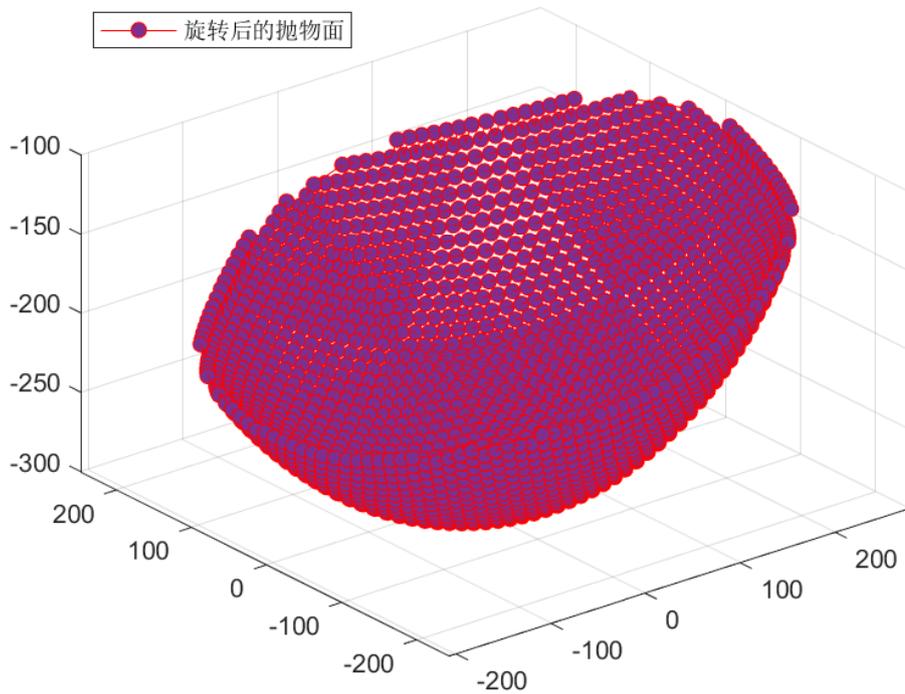


图 2 一般角度入射方向时 300m 口径工作面

2.3 问题三的分析

本问题需要我们基于问题二计算调节后馈源仓的接受比。在理想情况下，当给定方向的信号射入抛物面时，所有的信号都被反射到焦点处。但主索节点的完美调节无法得到，各个反射面板形成了一个近似理想抛物面的工作面。其次，反射面板均为三角形的平面，而不是理想的抛物面，这也是入射信号不能汇聚到焦点上的重要原因。为了简化问题，我们计算三角板块几何中心反射信号能否被馈源仓接收到，然后统计馈源仓接收到由三角形反射面板反射的信号数量，将其与所有三角形反射面板数量作比，得到馈源仓的接受比。

首先，由三角形反射面板三个主索节点的坐标，可以确定该平面的方程，则从 SC

方向入射的信号经过该平面反射后，可以求出其反射信号。其次，馈源仓所在平面与焦面相切于焦点 P ，可知该平面的法向量为 SC 方向，由此得到馈源仓所在平面方程。第三，求解反射信号与馈源仓所在平面的交点，若交点与 P 的距离小于 0.5，则反射信号可以被馈源仓接收。

三、模型假设

1. 入射信号方向与观测目标和基准球面球心的连线 CS 方向平行
2. 下拉索是刚体，不会发生形变
3. 反射面板无厚度且平整，可以看作一个平面
4. 每个反射面板反射的信号，都等价于三角形反射面板重心所反射的信号
5. 当三角形反射板的三个顶点都在口径为 300m 的工作抛物面内时，我们定义它为工作状态，否则不是

四、符号说明

表 1 符号说明

符号	意义
S	观测目标
C	基准球面的球心
P	馈源仓所在平面与焦面的交点
α	方位角
β	仰角
P_i	主索节点
S_i	促动器下端点
T_i	促动器上端点
\vec{A}	入射信号
\vec{B}_n	反射信号
\vec{I}_n	法线

五、模型的建立与求解

5.1 问题一：特殊角度下的工作抛物面确定

5.1.1 思路概要

本题需要考虑当 $\alpha=0^\circ$, $\beta=90^\circ$ 时理想抛物面的方程。我们将空间坐标系下的三维问题转化为平面直角坐标系的二维问题，建立基准球面方程和理想抛物线方程。再对参数 c 进行等距差分取值，得到对应的理想抛物线方程，转化为空间直角坐标系下的理想抛物面方程。得到方程后利用向量共线定理，将附件一中主索节点的坐标代入到确定的抛物面方程中，以此得到反射面板调节后的主索节点的坐标。得到坐标后再利用两点距离公式求出主索节点在反射面板调节前后的促动器伸缩量，并统计参数 c 在不同取值下的促动器伸缩量的数字特征，以此得出最佳参数 c 和 p ，最后得出最佳理想抛物面方程。

5.1.2 具体操作步骤

为了确定 $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$ 时情况下的理想抛物面，我们首先采用理想圆方程和抛物线方程来代替基准球面和工作抛物面。

基准圆方程为：

$$x^2 + y^2 = R^2; \quad (1)$$

抛物线标准方程为：

$$x^2 + 2py + c = 0; \quad (2)$$

我们下面利用方程 (1)(2)，来确定方程 (1) 所对应的理想抛物面

1. 关键参数 p 和 c 的初确定以及约束条件的确定 由于在问题一中确定的是理想抛物面，而非真实的工作抛物面，所以不考虑约束条件：相邻结点距离变化幅度小于 0.07%；考虑约束条件：径向伸缩范围 $[-0.6, 0.6]$ 米。

根据公式

$$c - \frac{p}{2} = R - 0.466R \quad (3)$$

可知，当 $c = R$, $\frac{p}{2} = 0.466R$ 时，理想抛物面和基准球面恰好相切。基准球面的顶点与理想抛物面的顶点重合。得到关键参数 c 和 p 值后，我们对 p 设定一个区间 $[P1, P2]$ ，以 0.05 为步长，等分选取 p 值。不同的 p 值得到一系列不同的抛物面方程，通过抛物面方程和附件一中的基准球面主索节点坐标即可确定一系列主索节点对应的在理想抛物面的坐标，再通过约束条件即可选取最理想的抛物面方程。

2. 计算主索节点在理想抛物面的坐标 得到最佳理想抛物面的方程后,即可确定所有主索节点在反射面板调节后位于理想抛物面上的坐标。下一步根据向量共线基本原理即可确定主索节点在理想抛物面的坐标。

根据向量共线基本原理,如果向量 $a \neq 0$,那么向量 b 与 a 共线的充要条件是:存在唯一实数 k ,使得:

$$b = ka \quad (4)$$

我们从附件一中得到基准球面所有主索节点的基准坐标,以基准球面的球心为原点建立坐标系:

图(可能画坐标系)

以附件一中某点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 为例,可得向量 \overrightarrow{OM} 。由于 \overrightarrow{OM} 不为 $\vec{0}$ 向量,且 M 点主索节点位于理想抛物面上的点 $M'(x', y', z')$,向量 $\overrightarrow{OM'}$ 与 \overrightarrow{OM} 共线,根据向量共线定理有:

$$\begin{cases} x' = kx_0 \\ y' = ky_0 \\ z' = kz_0 \end{cases} \quad (5)$$

由于理想抛物面的方程已经求出,将对应的 M' 坐标代入方程即可得到其关于 k 的一元二次方程:

$$k^2(x_0^2 + y_0^2) + 2pz_0k + C = 0 \quad (6)$$

对于附件一中的主索节点,每一个结点带入上述公式可以得到关于 k 的两个实数解,记作 k_1 和 k_2 ;由于所有的主索节点位于基准球面球心的 $-z$ 轴方向,所以只要将 k_1 、 k_2 分别带入 M' 中, $z' = kz_0$,使 $z' < 0$ 的对应 k 值即为本题序需要的 k 值实数解,同时舍去另一实数解,最后代入 $M'(x', y', z')$ 即可得到主索节点在理想抛物面的坐标。

3. 确定促动器的径向伸缩量,进一步确定理想抛物面参数 确定了所有主索节点对应理想抛物面上的坐标后,即可求得主索节点经过反射面板调节后的径向位移。空间两点间距离公式:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (7)$$

在 p 不同取值的情况下,此理想抛物面的方程也不同,直接影响主索节点的径向位移量。我们通过对比一簇抛物面方程下径向位移量的数学特征:最大值、最小值、方差以及均值等、找出理想抛物面。以下是 c 取不同值时,对应的径向位移量的数字特征:

c 取值	均值	方差	最小值	最大值
300.6	0.287635	0.199791	-0.200000	0.508585
300.65	0.240801	0.200076	-0.250000	0.461876
300.7	0.193968	0.200375	-0.300000	0.415168
300.75	0.147136	0.200688	-0.350000	0.368460
300.8	0.101368	0.201012	-0.400000	0.322816

由表可得：当 $c=300.8$ 时，均值最小，整体的反射面板调节程度最小，主索节点唯一最小，且径向伸缩量取值范围在 $[-0.6, 0.6]$ 内符合约束条件。上表所示信息可由图 (3) 进行补充

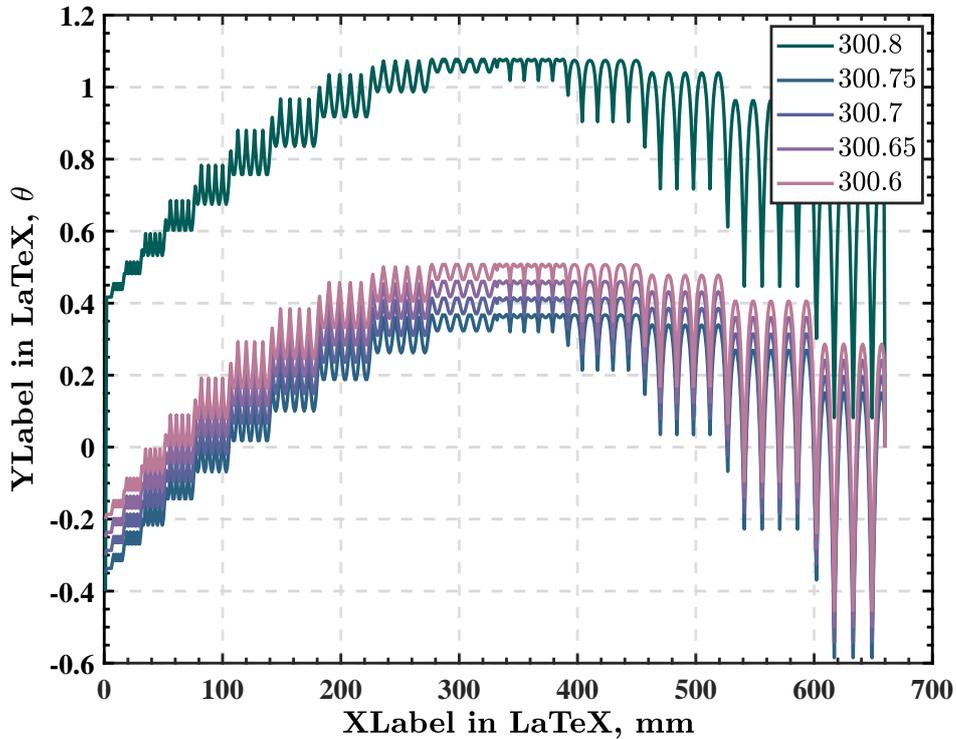


图 3 偏差随焦距的改变的变化图

5.2 问题二：一般角度下的工作抛物面确定

5.2.1 思路概要

本问题需要我们求解特定角度下的工作抛物面方程。为方便问题的求解与计算，我们首先利用旋转矩阵，建立起原坐标系 $O - xyz$ 与新坐标系 $O - x'y'z'$ 之间的坐标变化关系 [1]，将带有角度的抛物面确定问题转化为一般情形下的抛物面确定问题。以此计

算出经变换后的主索节点的坐标值。之后我们利用第一问确定的理想抛物面在新坐标系下的方程，求出待调整的经变换后的主索节点，并进行标记。由于工作抛物面与理想抛物面之间有偏差，因此，我们以理想抛物面与工作抛物面偏差最小为目标，径向伸缩量的绝对值 $\leq 0.6m$ ，相邻节点之间距离的变化幅度 $\leq 0.07\%$ 为约束条件，以工作抛物面上的主索节点在新坐标系中的坐标为参数，对工作抛物面进行优化，同时利用粒子群算法以求出全局极小值点，之后进行新坐标与旧坐标之间的转换，以得到题目所求的主索节点在旧坐标系中的坐标值。

5.2.2 具体操作步骤

1. 旋转矩阵与坐标变换 我们由旧坐标系 $O - xyz$ 变换至新坐标系 $O - x'y'z'$ 需要首先将坐标轴绕 z 轴，逆时针旋转 $\alpha = 36.795^\circ$ (以 \vec{zO} 方向俯视)，再将坐标轴绕 y 轴，逆时针旋转 $\beta = 78.169^\circ$ (以 \vec{Oy} 方向俯视)，此过程正如图 3 所示。设点 P 在 $O - xyz$ 下的坐标为 (x, y, z) ，在 $O - x'y'z'$ 下的坐标为 (x', y', z') 由参考文献 [1] 可知，上述过程相当于对进行如下坐标变换

$$T = T1T2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(1 - \beta) & 0 & \sin(1 - \beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(1 - \beta) & 0 & \cos(1 - \beta) \end{bmatrix} \quad (8)$$

之后，我们应用公式 (8)，对“附件 1”，“附件 2”之中的坐标均进行坐标变换，得到新坐标系下的坐标。

值得注意的是，经坐标变换之后的主索节点 D27 的坐标为 **(0.000759,-0.00000697,-300.4)** 在误差 $\eta \leq 0.001$ 的意义下，我们可以近似认为 D27 点即为原点 O 在新坐标系下 $Ox'y'$ 平面上的投影。

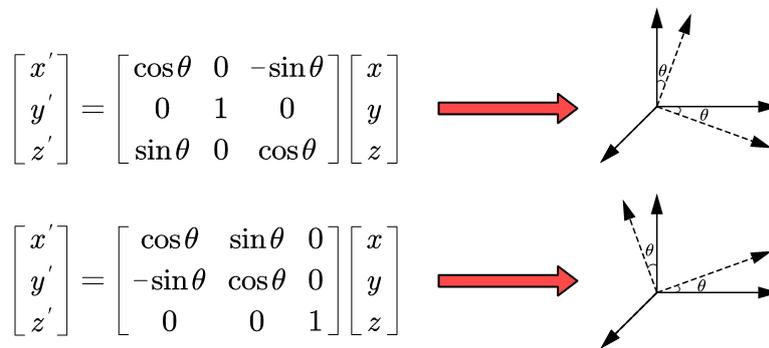


图 4 坐标旋转示意图

2. 确定工作抛物面 由于坐标系发生了旋转，因此在第一问之中所确定的理想抛物面时的顶点坐标将会发生改变，需要重新进行计算，计算方式仍如第一问所述。

由于促动器沿径向伸缩，而促动器控制主索节点沿径向上下移动，因此，主索节点的促动器所在直线的方向即为主索节点所在径向方向。因此，对于主索节点 P_i ，记其对应的促动器的顶端为 $S_i = (Sx'_i, Sy'_i, Sz'_i)^T$ ，底端为 $T_i = (Tx'_i, Ty'_i, Tz'_i)$ ，因此我们可以确定 $\overrightarrow{S_i T_i}$ 的方向，与理想抛物面方程联系，以求出新坐标系下每一个主索节点的坐标，之后由于抛物线照明区域口径为 300m，故以约束条件 $x'^2 + y'^2 \leq 150^2$ 对附件 1 中主索节点进行筛选，其结果如图 (5) 所示。将上述节点依距离抛物线最低点的距离大小标号

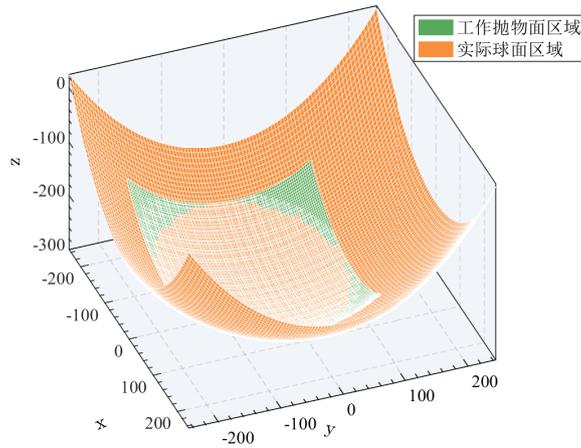


图 5 主索节点筛选图

记为 $1, \dots, n$ ，此标号下，上述主索节点的集合记为 $S = \{P_i\}_{i=1}^n$ ，其中主索节点 P_i 在新坐标系中基准球面上的坐标可记为：

$$C'_i = (cx'_i, cy'_i, cz'_i)^T, \quad i = 1, \dots, n.$$

其中， C'_i 下标的 i 表示其为第 i 个主索节点，上标的 $'$ 表示是在新坐标系下的坐标。

记主索节点 P_i 在新坐标系中理想抛物面上的坐标为：

$$X'_{i1} = (x'_{i1}, y'_{i1}, z'_{i1})^T, \quad i = 1, \dots, n.$$

其中， X'_{i1} 下标的 1 表示在理想抛物面上， i 表示其为第 i 个主索节点，上标的 $'$ 表示是在新坐标系下的坐标。

因此，我们可以得到理想抛物面与基准球面的偏差向量的坐标：

$$\Delta C'_i = (\Delta cx'_i, \Delta cy'_i, \Delta cz'_i)^T = X'_{i1} - C'_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

记主索节点 P_i 在新坐标系中工作抛物面上的坐标为：

$$X'_{i2} = (x'_{i2}, y'_{i2}, z'_{i2})^T, \quad i = 1, \dots, n.$$

同理， X'_{i2} 下标的 2 表示在工作抛物面上， i 表示其为第 i 个主索节点，上标的 ' 表示是在新坐标系下的坐标。

因此，我们可以得到理想抛物面与工作抛物面的偏差向量的坐标：

$$\Delta X'_i = (\Delta x'_i, \Delta y'_i, \Delta z'_i)^T = X'_{i2} - X'_{i1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

我们的目的就是使得理想抛物面与工作抛物面偏差最小，即使得上述向量模长尽可能的小：

$$MMSE(x'_{12}, y'_{12}, z'_{12}, \dots, x'_{n2}, y'_{n2}, z'_{n2}) = \sum_{i=1}^n (\Delta X'_i)^2 + (\Delta Y'_i)^2 + (\Delta Z'_i)^2 \quad (9)$$

另一方面，对于径向伸缩量，我们仍然需要满足其变化范围在 $[-0.6m, 0.6m]$ 之间，此约束条件可写为：

$$-0.6m \leq |X'_i - C'_i| \leq 0.6m$$

而对于相邻节点之间的距离，则需要满足其变化幅度在 $[-0.07\%, 0.07\%]$ 之间，此约束条件可写为：

$$\frac{|C'_{i+1} + (\Delta C'_{i+1} + \Delta X'_{i+1}) - (C'_i + (\Delta C'_i + \Delta X'_i))|}{|C'(i+1)' - C'_i|} \leq 0.07\%, \quad i = 1, \dots, n$$

因此，我们可以得到如下规划模型：

$$\begin{aligned} \min MMSE(x'_{12}, y'_{12}, z'_{12}, \dots, x'_{n2}, y'_{n2}, z'_{n2}) &= \sum_{i=1}^n (\Delta X'_i)^2 + (\Delta Y'_i)^2 + (\Delta Z'_i)^2 \\ \text{s.t.} &\begin{cases} -0.6m \leq ||X'_i| - |C'_i|| \leq 0.6m \\ \frac{|C'(i+1)' + (\Delta C'_{i+1} + \Delta X'_{i+1}) - (C'_i + (\Delta C'_i + \Delta X'_i))|}{|C'(i+1)' - C'_i|} \leq 0.07\% \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (10)$$

3. 求解上述非线性优化 由于10优化问题为非线性优化问题，我们利用启发式算法——粒子群算法探索其全局最小值点。

核心 模拟自然界鸟类群体中的个体对信息的共享使整个群体的运动在问题求解空间中产生从无序到有序的演化过程，从而获得问题的可行解。

粒子群算法最先由 Kennedy.J. 教授于 1995 年提出，并广泛用于探索函数的全局极值的问题之中。[2] 其数学原理如下：

数学原理 若 x_i^d 是第 i 个粒子在第 d 步所在位置， v_i^d 是第 i 个粒子在第 d 步的速度， δt 是粒子迭代的间隔时间，一般取 $\delta t = 1$ ， w 是速度惯性权重， c_1, c_2 分别是粒子的个体和社会学习因子 pb_i^d 是第 i 个粒子截止到第 d 步位置的最佳位置， gb^d 是所有粒子截止到

第 d 步位置的最佳位置， $f(x)$ 是位置 x 处的适应度值，一般为目标函数值， n 为例子的个数， k 为迭代次数，则粒子群算法可以用公式 (11) 进行描述：

$$\begin{aligned} x_i^d &= x_i^{d-1} + v_i^{d-1} \delta t \\ v_i^d &= wv_i^{d-1} + c_1 r_1 (pb_i^d - x_i^d) + c_2 r_2 (gb^d - x_i^d) \end{aligned} \quad (11)$$

其中： r_1, r_2 为 $[0, 1]$ 上的随机数。

因此，设置不同的 w, c_1, c_2, k ，均可以对模型的全局搜索能力以及局部搜索能力进行加强，这里我们使用 MezuraMontes 教授 (2011 年)[8] 与 Pedersen 教授 (2010 年)[9] 的研究成果，对上述参数进行优化。

此算法设置 $c_1 = c_2 = 1.49, k = 100, w \in [0.1, 1.1]$ 其具体值随搜索到的最高值的变化而变化，以控制搜索范围是否为局部或者全局搜索，并可以根据值的变化情况决定是否退出迭代循环，最后调用其他函数对于此最小值进行交叉验证，以验证所得值的准确性。

由于粒子群算法具有随机性，我们对结果进行了 10 次计算，取其平均值，作为上述 MMSE 的结果，同时得到其对应的坐标值。

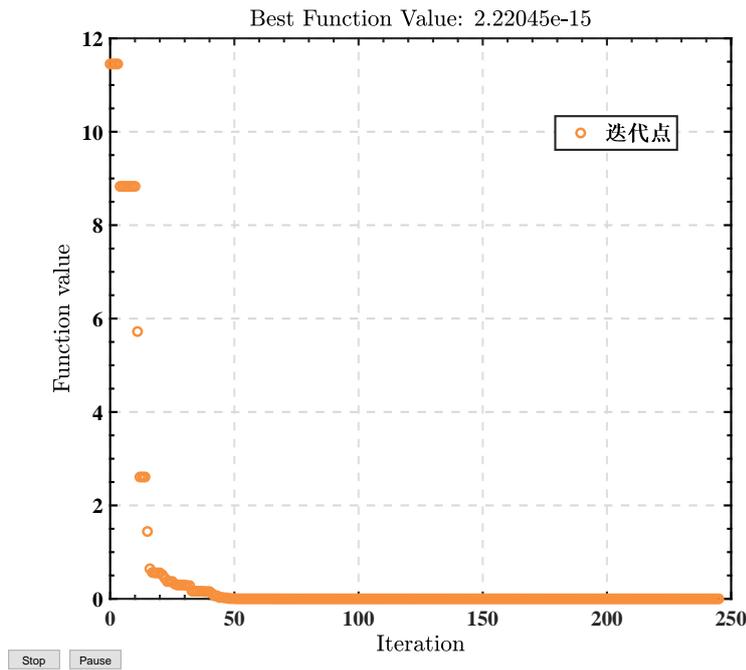


图 6 迭代次数变化图

1

4. 求解变化后的主索节点坐标值 我们在得到求解变化后的主索节点在新坐标系下的坐标值 $x'_{12}, y'_{12}, z'_{12}, \dots, x'_{n2}, y'_{n2}, z'_{n2}$ ，之后将其带入公式 (8) 所示的坐标变换方程之中，

¹某一次迭代所得函数值随次数的变化图，由此图可以得到，我们的粒子群算法经过 250 次即可收敛。

我们可以得到上述主索节点在旧坐标系下的坐标值：

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(1-\beta) & 0 & \sin(1-\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(1-\beta) & 0 & \cos(1-\beta) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

最后，将其写入附件 4 之中，得到结果。

5.3 问题三：计算调节后馈源舱的接收比

5.3.1 思路概要

本问题需要我们计算实际情况下馈源舱接收到的信号与工作抛物面反射的所有信号之比。根据分析，我们发现工作抛物面外的区域反射的信号无法到达馈源舱的接受区域，因此只需要考虑工作抛物面内的信号反射情况。

由于实际情况下每块反射面板都为平面结构，不能完全地贴合到抛物面上，这使得实际反射信号与理想抛物面计算得到的反射信号相比有所偏差，不能完全被馈源舱接收，因此我们需要确定实际情况下馈源舱能接收到的信号。首先需要确定工作抛物面中所包含的所有三角形反射面板，并对这些反射面板进行编号。结合第二问得到的主索节点坐标，利用空间解析几何的方法确定每一块反射面板的反射信号，判断反射信号是否与馈源舱所在的部分球面相交，最后即可确定实际情况下馈源舱接收到的信号与工作抛物面反射的所有信号之比。

5.3.2 具体操作步骤

1. 工作反射面板的确定 首先，假设当反射面板所对应的三个主索节点都在工作抛物面内时，我们认为这个反射面板在工作抛物面内。依据以上假设，即可筛选出工作抛物面内包含的所有反射面板。筛选后，我们对工作反射面板进行编号。

2. 确定反射面板对应的反射信号 由于入射信号为平行信号，所以每一个反射面板所对应的反射信号也相互平行，我们用三角形重心所反射的信号代表整个反射面板所反射的信号。

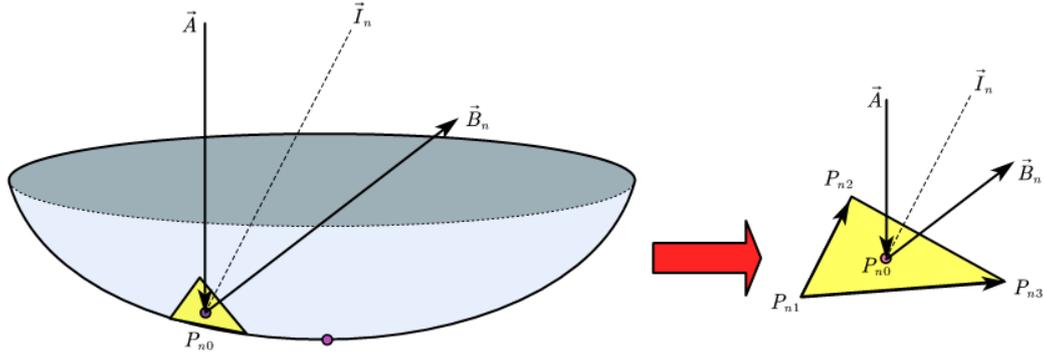


图 7 三角形反射面板信号图

第 n 个工作反射面板的中心点坐标 附件三给出了反射面板对应的主索节点编号, 则对应第二问得到的结果, 可知第 n 个反射面板对应的三个顶点的坐标分别为 $P_{n1}(x_{n1}, y_{n1}, z_{n1})$, $P_{n2}(x_{n2}, y_{n2}, z_{n2})$, $P_{n3}(x_{n3}, y_{n3}, z_{n3})$, 则第 n 个反射面板的中心坐标为

$$P_{n0}\left(\frac{x_{n1} + x_{n2} + x_{n3}}{3}, \frac{y_{n1} + y_{n2} + y_{n3}}{3}, \frac{z_{n1} + z_{n2} + z_{n3}}{3}\right) \quad (13)$$

第 n 个工作反射面板的法向量 由于法线垂直于反射面板所在的平面, 且三个顶点坐标已知, 利用空间向量的叉乘, 即可求得每个反射面板对应的法线。第 n 个工作反射面板两条边对应的空间向量为 $\overrightarrow{P_{n1}P_{n2}} = (x_{n2} - x_{n1}, y_{n2} - y_{n1}, z_{n2} - z_{n1})$, $\overrightarrow{P_{n1}P_{n3}} = (x_{n3} - x_{n1}, y_{n3} - y_{n1}, z_{n3} - z_{n1})$, 则可求得法向量

$$\vec{I}_n = \overrightarrow{P_{n1}P_{n2}} \times \overrightarrow{P_{n1}P_{n3}} \quad (14)$$

第 n 个工作反射面板的反射信号 经第二问的坐标变换后, 可以将入射信号所对应的向量设为 $\vec{A} = (0, 0, 1)$, 设反射信号对应的向量为 \vec{B}_n , 利用方程组

$$\begin{cases} \vec{B}_n = \lambda \vec{I}_n + \mu \vec{A} \\ \cos(\vec{I}_n, \vec{A}) = \cos(\vec{I}_n, \vec{B}_n) \end{cases} \quad (15)$$

即可解出 \vec{B}_n 。最后, 结合三角形反射面板的中心点坐标 P_{n0} , 写出反射信号的空间直线方程, 从而计算得到其与馈源仓所在平面的交点。若交点与 P 的距离小于 0.5, 则认为该信号被馈源仓接收, 否则为不接收。最后, 计算出被接收的信号数量, 将其与所有反射信号作比, 即可得到馈源仓的接收比。

3. 计算结果与分析 经计算，馈源仓的接收比为 0.9867%，接收效率较高，可以认为经优化规划后得到的工作面是合理的。

六、模型的评价与推广

6.1 模型优点

1. 求解方法便于推广 在第一问的求解过程中，我们仅仅需要表达出理想抛物面的方程就可以通过径向位移量的数字特征来验证抛物面方程，在后续模型推广中，也可以通过同样的方法类比的得到对应抛物面的方程。

2. 目标规划 求解工作抛物面时，由于工作抛物面与理想抛物面有偏差，且同时需要满足几个不同的约束条件，因此我们选择了目标规划。目标规划算法不仅可以将偏差目标通过数学形式表达，而且可以将所有约束条件转化为数学表达式。在后续模型推广过程中，如果约束条件或者评价的偏差目标发生改变，只需要把对应的数学约束表达式加入方程组即可。

3. 粒子群算法 粒子群算法是一种基于群体智能的进化算法。算法运算简单，没有交叉和变异运算，在迭代过程将最优粒子的信息传递给其他粒子，因此粒子搜索速度快。粒子群算法在解决线性或非线性的函数优化时都有良好的性能。粒子群算法为启发式算法，在后续可以与其他算法结合，以改善算法的性能。

6.2 模型缺点

1. 算法缺点 粒子群算法缺乏对于速度的动态调节，容易陷入局部最优，导致收敛精度低和不易收敛的情况。由于赛题本身存在有非线性约束条件，在函数优化过程中可能会出现计算速度慢，计算量过大等问题。

2. 问题三缺点 在进行问题三的求解时，我们将反射面板近似看做等边三角形，在计算入射和出射信号时仅考虑了反射面板中心的反射，位于抛物面 300 米口径临界可能出现反射面位于界内而中心位于界外的情况，对于馈源舱的接收比计算会产生一定的误差。

6.3 模型改进

1. 算法改进 在本文使用的算法之外，我们还可以将其与其他算法结合。如用不同分量划分子群体，用 N 个相互独立的微粒群分别在 D 维的搜索空间的不同维度上进行搜索。还可以使用基于模拟退火的粒子群算法，将粒子群算法的计算能力、实现简单和模拟退

火算法的较强跳出局部最优解能力结合，避免粒子群算法陷入局部极值点，提高粒子群算法进化后期的收敛能力。

2. 假设情况 在假设中我们将反射面板近似的认为是等边三角形来计算三角形的中心，且仅计算反射面板中心的反射，会产生的一定误差。我们可以将模型进一步细化，考虑反射面板 300 米口径临界周围未考虑到的反射，以此更精确的计算馈源舱的接收比。

参考文献

- [1] 阎海庆, 邹峥嵘, 罗发明, 王静, and 王成亮. 近景摄影测量中旋转矩阵构成方法的研究. 测绘科学, 032(003):15–17, 2007.
- [2] J. Kennedy and R. Eberhart. Particle swarm optimization. In Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks, volume 4, pages 1942–1948 vol.4, 1995.
- [3] Y. Shi and R.C. Eberhart. Empirical study of particle swarm optimization. In Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation-CEC99 (Cat. No. 99TH8406), volume 3, pages 1945–1950 Vol. 3, 1999.
- [4] Zhi-Hui Zhan, Jun Zhang, Yun Li, and Henry Shu-Hung Chung. Adaptive particle swarm optimization. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 39(6):1362–1381, 2009.
- [5] Liping Zhang, Huanjun Yu, and Shangxu Hu. A new approach to improve particle swarm optimization. In Erick Cantú-Paz, James A. Foster, Kalyanmoy Deb, Lawrence David Davis, Rajkumar Roy, Una-May O'Reilly, Hans-Georg Beyer, Russell Standish, Graham Kendall, Stewart Wilson, Mark Harman, Joachim Wegener, Dipankar Dasgupta, Mitch A. Potter, Alan C. Schultz, Kathryn A. Dowsland, Natasha Jonoska, and Julian Miller, editors, Genetic and Evolutionary Computation — GECCO 2003, pages 134–139, Berlin, Heidelberg, 2003. Springer Berlin Heidelberg.
- [6] 毛开富, 包广清, and 徐驰. 基于非对称学习因子调节的粒子群优化算法. 计算机工程, 36(019):182–184, 2010.
- [7] M. Clerc. The swarm and the queen: towards a deterministic and adaptive particle swarm optimization. In Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation-CEC99 (Cat. No. 99TH8406), volume 3, pages 1951–1957 Vol. 3, July 1999.
- [8] Efrén Mezura-Montes and Carlos A. Coello Coello. Constraint-handling in nature-inspired numerical optimization: Past, present and future. Swarm and Evolutionary Computation, 1(4):173–194, 2011.
- [9] Magnus Erik Hvass Pedersen. Good parameters for particle swarm optimization. Hvass Lab., Copenhagen, Denmark, Tech. Rep. HL1001, pages 1551–3203, 2010.

附录 A 问题一代码

```
import pandas as pd
import math
import numpy as np

ini_num = -300.035

file = pd.read_csv('附件1.csv',encoding='gbk')
data = file.iloc[:,1:]
out_list = []
for i in data_values:
    a = i[0] **2 + i[1] ** 2
    b = -559.34 * i[2]
    c = -559.34 * (-1) * ini_num
    x1=( (-b+math.sqrt( b**2-4*a*c) ) / (2*a) )
    x2=( (-b-math.sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a))
    print("x1=", x1*i[2], "\t", "x2=", x2*i[2])
    out = x1 * i
    out_list.append(out)

out_list[0] = np.array([0,0,ini_num]) # 顶点手工加

dis_list = []
for i in range(len(data_values)):
    print(data_values[i]) # 查看数据
    print(out_list[i])
    if ( (data_values[i][0]**2 + data_values[i][1]**2 ) >= 22500):
    else:
        out_list[i] = np.append(out_list[i],1)
        dis = math.sqrt( (data_values[i][0] - out_list[i][0])**2 + \
        (data_values[i][1] - out_list[i][1])**2 + (data_values[i][2] - out_list[i][2])**2 )
        if out_list[i][2] - data_values[i][2] <= 0:
            dis *= -1
        print(dis)
        dis_list.append(dis)

out_list = pd.DataFrame(out_list,index=file.index,
                        columns=['x','y','z','超出范围'])
out_list['节点编号'] = file['节点编号']
out_list['距离'] = dis_list
out_list.to_csv('结点距离_超出范围_修正距离正负_300.035.csv',
                index_label=False)
```

附录 B 问题二代码

```
import pandas as pd
import math
import numpy as np
A = 36.795,b = 78.169
T1 = [[cos(A),-sin(A),0], [sind(a), cosd(a), 0], [0,0,1] ]
T2 = [[cos(90-B),0,sin(90-b)], [0,0,1],[-sin(90-b), 0,cosd(90-b)] ]
T = T1 * T2
file_1 = pd.read_csv('附件1.csv',encoding='utf-8')
file_2 = (inv(T) * file_1)
file_tran=300*[cosd(b)*cosd(a) ,cosd(b)*sind(a),sind(b)]
file_tran=inv(R)*tt
file_F=file_2(:,1)**2+file_2(:,2)**2 #坐标平方和
file_tran=find(file_F<=22500) # 需要调整的结点的编号
file_3=file_2(file_tran,:) # 转后坐标后的要调整的结点的坐标
file_4=file_1(file_tran,:) # 需要调整的结点的基准球面坐标

for i in range(file_3)
j=file3(i)
x0=file_2(j,1)
y0=file_2(j,2)
z0=file_2(j,3)
[x1,y1,z1]=qiujiadian(x0,y0,z0)
file_5(i,1)=x1
file_5(i,2)=y1
file_5(i,3)=z1
end
file_6=file_5*R # 这个是在抛物面的坐标, 转回到原坐标 但是不是这个作为坐标
distance=sqrt(sum((file4-file_6).^2,2))
```

附录 C 问题三代码

```
function [x] = main3(x)
%function main3: 第三问的主程序。
% x=input('请输入进行计算的节点坐标。\\n行坐标为节点编号, 列坐标为节点坐标');

p1=x(1:10,1:3);
p2=x(1:10,4:6);
p3=x(1:10,7:9);

N=max(size(p1));
```

```

c=[(p1(:,1)+p2(:,1)+p3(:,1))/3,(p1(:,2)+p2(:,2)+p3(:,2))/3,(p3(:,3)+p3(:,3)+p3(:,3))/3];

%计算每个三角形所在平面的法向量
o12=p2-p1;
o13=p3-p1;
n=cross(o12,o13);
% n=c+n

%光线方向
I=[0,0,1];
l= repmat(I,[N,1]);
% l=I+c

% 尝试数值解
for i=1:N
p(i,:)=[c(i,:),n(i,:),l(i,:)];
result(i,:)=fminsearch(@(x)findreflect(x,p(i,:)),[1,2,3,4,5])
end

% % 尝试符号解
% %确定反射方向
% syms x y z
%
% p=[x,y,z];
% p=repmat(p,[N,1]);
% r=p-c
%
% %确定共面
% syms u v
% eq1 = r==u*n+v*l
%
% %确定同角
% for i=1:N
%
%     eq2(i,1)=dot(n(i,:),l(i,:))^2/(n(i,1)^2+n(i,2)^2+n(i,3)^2)/(l(i,1)^2+l(i,2)^2+l(i,3)^2)==dot(n(i,:),r(i,:))^2/(n(i,1)^2+n(i,2)^2+n(i,3)^2);
% end
% eq2
%
%
% %确定模长
% for i=1:N
%     eq3(i,1)=r(i,1)^2+r(i,2)^2+r(i,3)^2==1;
% end
% eq3
%
% vpasolve(eq1(i,1),eq1(i,2),eq1(i,3),eq2(i),eq3(i),[x,y,z],c(i,:))

```

```

%
% for i=1:N
%   result(i,:) = vpasolve(eq1(i,1),eq1(i,2),eq1(i,3),eq2(i),eq3(i),x,y,z)
% end

% 确定交点
syms t;
r=(result(:,1:3)-c)*t+c
for i=1:N
rt=solve(r(i,3)==-160.4136,t)
if subs(r(i,2)^2,t,rt)^2+subs(r(i,1)^2,t,rt)^2<=1
x(i,10)=1;
else
x(i,10)=0;
end
end
end

```